TRAIAN TĂMÎIAN

MATEMATICĂ

PROBLEME
PENTRU
EXAMENE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE

Clasele IX – XII

Olimpiade de matematică • Admitere în învăţământul superior • Bacalaureat

Cuvânt-înainte de Mircea Trifu

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

1. Operaţii cu numere reale. Inegalităţi

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia: $xy + 2(x - y) = 2007$.

Traian Tămîian, O.M.L. 2008

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia:
$x^2 + y^2 + xy(x + y + 2) = 6$.

Traian Tămîian

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia: $xy - 2008x + 2009y = 2009^2$.

Traian Tămîian

4*. a) Demonstraţi că există $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^3 = y^2 + z^4$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n dat. Demonstraţi că există $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^n = y^{n-1} + z^{n+1}$.

Traian Tămîian, Concurs 2007

5*. a) Arătaţi că există $x, y, z, t \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ astfel încât $x - y^2 + z^3 + t^5 = 0$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n dat. Arătaţi că există $x, y, z, t \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ astfel încât:

$x^{n-1} - y^n + z^{n+1} + t^{n^2+1} = 0$.

Traian Tămîian, R.M.T. 1/2010

6*. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^2c^2 + ac + abc \leq 0$. Arătaţi că $b^2 \geq 4ac$.

Gabriel Popa, R.M.T. 3-4/2000

7. Fie $a, b \in (0, \infty)$ astfel încât $ab = 1$. Arătaţi că $\dfrac{a^3}{a+1} + \dfrac{b^3}{b+1} \geq 1$.

Traian Tămîian, G.M. 7-8-9/2010

8*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n dat şi $a, b \in (0, \infty)$ astfel încât $a \cdot b = 1$. Demonstraţi că:

$$\frac{a^n}{b+1} + \frac{b^n}{a+1} \geq 1.$$

Mircea Berca, G.M. 10/2011

9. Fie $a, b \in (0, \infty)$ astfel încât $ab = 1$. Arătaţi că $\dfrac{a^3 + b^2}{a+1} + \dfrac{b^3 + a^2}{b+1} \geq 2$.

Traian Tămîian

10. Fie $a,\ b\in(0,\ \infty)$ astfel încât $a\cdot b=1$. Demonstrați că:

$$\frac{a^{2010}+a^{2011}}{1+b}+\frac{b^{2010}+b^{2011}}{1+a}\geq 2.$$

Traian Tămîian

11. Fie $a,\ b\in(0,\ \infty)$ astfel încât $a\cdot b=1$. Demonstrați că: $a^{2011}+b^{2011}\geq a^{2010}+b^{2010}$.

Traian Tămîian

12. Demonstrați că pentru orice $a,\ b\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$a^{2012}+b^{2012}+2\geq a^{2011}+b^{2011}+a+b.$$

Traian Tămîian

13. Fie $a,\ b,\ c\in(0,\infty)$ astfel încât $abc=1$. Demonstrați că:

$$\frac{a^3+a^2}{bc+1}+\frac{b^3+b^2}{ca+1}+\frac{c^3+c^2}{ab+1}\geq 3.$$

Traian Tămîian

14. Dacă $a,\ b,\ c,\ d\in(0,\ \infty)$, arătați că $\dfrac{1}{(a+d)^2}+\dfrac{1}{(b+d)^2}+\dfrac{1}{(c+d)^2}\leq\dfrac{ab+bc+ca}{4abcd}$.

Traian Tămîian

15*. Determinați $x,\ y\in\mathbb{R}$ știind că $\max\left\{x^2+y+\dfrac{1}{4},\ y^2+x+\dfrac{1}{4}\right\}\leq 0.$

Traian Tămîian, G.M. 7-8-9/2011

16*. Determinați $x, y, z\in\mathbb{R}$, știind că $\max\left(x^2+z^2+y+\dfrac{1}{4},\ \ y^2+z^2+x+\dfrac{1}{4}\right)\leq z-\dfrac{1}{4}$.

Traian Tămîian

17**. Arătați că pentru orice $x, y, z\in(0,\infty)$ are loc inegalitatea:

$\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+zx}+\dfrac{1}{z^2+xy}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)$. Precizați în ce condiții are loc egalitatea.

Traian Tămîian, O.M.J. 2006

18**. Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive $a,\ b,\ c$ este adevărată inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}-\frac{a^3+b^3+c^3}{6}\leq 1.$$

Traian Tămîian, G.M. 3/1998

19*. Fie $a, b \in [0, +\infty)$. Arătați că:

$$\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{2}}+\sqrt{\frac{c}{3}}-\frac{a+b+c}{2}\le\frac{11}{12}.$$

Cristian Grecu, G.M. 11/1996

20. a) Arătați că $(x+a)(x+b)\ge(x+\sqrt{ab})^2$ pentru orice $a, b, x\in[0,\infty)$.

b) Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc dubla inegalitate $(a+b)(b+c)(c+a)\ge(a+\sqrt{bc})(b+\sqrt{ca})(c+\sqrt{ab})\ge 8abc.$

Traian Tămîian

21*. Dacă $a>0, b>0, c>0$ demonstrați că:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Traian Tămîian

22.** Demonstrați că, dacă $x_i>0, (\forall)\ i=\overline{1,n}, n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, atunci

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}+\frac{1}{2x_1+3x_2+\ldots+nx_{n-1}+x_n}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{nx_1+x_2+\ldots+(n-1)x_n}\right)\ge\frac{2n}{n+1}.$$

Traian Tămîian

23*.** Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n\in(0,+\infty)$ și $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, demonstrați inegalitatea:

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})^2}{1+a_n}+\frac{(a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{1+a_1}+\ldots+\frac{(a_n+a_1+\ldots+a_{n-2})^2}{1+a_{n-1}}\ge\frac{(n-1)^2}{n+1},$$ unde

$n\in\mathbb{N}, n\ge 3.$

Traian Tămîian, în atenția comisiei O.M.N. 2007

24*. Demonstrați că pentru orice numere reale x, y are loc inegalitatea:

$((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)(x^2+(y-1)^2)(x^2+(y+1)^2)\le((x^2+y^2)^2+1)^2$.

Când are loc egalitatea?

Traian Tămîian

25.** Demonstrați că pentru orice $a, b, c\ge 0$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{2a+4b+4c}+\sqrt{4a+2b+4c}+\sqrt{4a+4b+2c}\ge 3(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Traian Tămîian, G.M. 1/2005

26.** Demonstrați că pentru orice numere reale a, b, c are loc inegalitatea:

$$\sqrt{3a^2+12b^2+27c^2}+\sqrt{3b^2+12c^2+27a^2}+\sqrt{3c^2+12a^2+27b^2}\ge 6(a+b+c).$$

Traian Tămîian

27**. Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc inegalitatea:
$$\sqrt{(2a+c)(2b+c)}+\sqrt{(2b+a)(2c+a)}+\sqrt{(2c+b)(2a+b)}\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2.$$

Traian Tămîian

28**. Fie a, b, c, d numere reale nenule cu proprietatea $|ad-bc|\leq 1$.

Arătaţi că $\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{c^2+d^2}+\dfrac{\sqrt{1+(ac+bd)^2}}{2}\geq 2.$

Traian Tămîian

29**. Fie $x, y, z\in\mathbb{R}$ cu proprietatea $x^2+y^2+z^2\leq 9$. Demonstraţi inegalitatea:
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+zx+3}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+xy+3}}\geq 1.$$

Traian Tămîian, G.M. 12/2012

30**. Demonstraţi că, dacă $s, a_1, a_2, ..., a_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=s$, atunci
$$\sqrt{s-a_1^2}+\sqrt{s-a_2^2}+...+\sqrt{s-a_n^2}\geq\sqrt{n-1}\,(a_1+a_2+...+a_n),\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

Traian Tămîian, G.M. 7-8/2001

31*. Fie $a, b\in(0,1)$. Demonstraţi echivalenţa: $a^2+b^2=1\Leftrightarrow\dfrac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1}=\dfrac{2}{3}$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, G.M. 4/2001

32*. Arătaţi că numărul $E=x^{4n}-x^{4n-1}+x^{4n-2}-x^2+1$ este strict pozitiv, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Dinicu Budescu, G.M. 2/1996

33*. Fie $x, y, z, t, u, v\in\mathbb{R}_+^*$. Demonstraţi că dacă există $a, b\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât să fie satisfăcute simultan condiţiile: $3a-2b=x^2$, $5a-4b=y^2$, $7a-6b=z^2$, $2b-a=t^2$, $4b-3a=u^2$, $6b-5a=v^2$ şi $x+y+z=t+u+v$, atunci $x^n+y^n+z^n=t^n+u^n+v^n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Traian Tămîian

34. Dacă a, b, $c\in(0,\infty)$ arătaţi că are loc inegalitatea:
$$\frac{\max\left(a,\dfrac{b+c}{2}\right)}{b+c}+\frac{\max\left(b,\dfrac{a+c}{2}\right)}{a+c}+\frac{\max\left(c,\dfrac{a+b}{2}\right)}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Traian Tămîian

Soluţii

Clasa a IX-a

1. Operaţii cu numere reale. Inegalităţi

1. Ecuaţia se scrie echivalent $xy + 2x - 2y - 4 = 2003 \Leftrightarrow x(y+2) - 2(y+2) = 2003 \Leftrightarrow (x-2)(y+2) =$ $= 2003$. Cum 2003 este număr prim, rezultă cazurile:

1) $\begin{cases} x-2=2003 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2005 \\ y=-1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$ sau 2) $\begin{cases} x-2=1 \\ y+2=2003 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2001 \end{cases}$.

Soluţia ecuaţiei este deci $S = \{(3, 2001)\}$.

2. Ecuaţia se scrie astfel:

$x^2 + y^2 + 2xy + xy(x+y) = 6 \Leftrightarrow (x+y)^2 + xy(x+y) = 6 \Leftrightarrow (x+y)(x+y+xy) = 6.$

Cazul 1) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Cazul 2) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y+xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=5 \end{cases}$, sistem care nu are soluţii în numere naturale.

Deci, soluţia ecuaţiei este $S = \{(1, 1)\}$.

3. Scăzând din fiecare membru $2008 \cdot 2009$, ecuaţia se scrie succesiv:

$xy - 2008x + 2009y - 2008 \cdot 2009 = 2009^2 - 2008 \cdot 2009$

$x(y-2008) + 2009(y-2008) = 2009(2009-2008) \Leftrightarrow (x-2008)(y+2009) = 2009.$

Deoarece $2009 = 1 \cdot 2009 = 7 \cdot 287 = 41 \cdot 49$, se disting cazurile:

Cazul 1) $\begin{cases} x+2009=2009 \\ y-2008=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2009 \end{cases}$.

Cazul 2) $\begin{cases} x+2009=1 \\ y-2008=2009 \end{cases}$, imposibil.

Cazul 3) $\begin{cases} x+2009=7 \\ y-2008=287 \end{cases}$, imposibil.

Cazul 4) $\begin{cases} x+2009=287 \\ y-2008=7 \end{cases}$, imposibil.

Cazul 5) $\begin{cases} x+2009=41 \\ y-2008=49 \end{cases}$, imposibil.

Cazul 6) $\begin{cases} x+2009=49 \\ y-2008=41 \end{cases}$, imposibil.

Rezultă că unica soluţie a ecuaţiei date este $S = \{(0, 2009)\}$.

4. a) Din egalitatea $2^9 = 2^8 + 2^8$ rezultă $(2^3)^3 = (2^4)^2 + (2^2)^4$ şi punând $x = 2^3$, $y = 2^4$, $z = 2^2$ rezultă că $x^3 = y^2 + z^4$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc egalităţile $(2^{n+1})^{n-1} + (2^{n-1})^{n+1} = 2 \cdot 2^{n^2-1} = 2^{n^2}$, de unde $(2^n)^n = (2^{n+1})^{n-1} + (2^{n-1})^{n+1}$ (1), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Luând în (1) $x = 2^n$, $y = 2^{n+1}$, $z = 2^{n-1}$, rezultă $x^n = y^{n-1} + z^{n+1}$.

5. a) Luăm $x = 3^{15}$, $y = 3^8$, $z = 3^5$, $t = 3^3$.

b) Folosind descompunerea $n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$ avem:

$(3^{(n+1)(n^2+1)})^{n-1} + (3^{(n^2+1)(n-1)})^{n+1} + (3^{(n-1)(n+1)})^{n^2+1} = 3 \cdot 3^{(n-1)(n+1)(n^2+1)} = 3 \cdot 3^{n^4-1} = 3^{n^4} = (3^{n^3})^n$, de unde

$(3^{(n+1)(n^2+1)})^{n-1} - (3^{n^3})^n + (3^{(n^2+1)(n-1)})^{n+1} + (3^{(n-1)(n+1)})^{n^2+1} = 0$ (*).

Luând $x = 3^{(n+1)(n^2+1)}$, $y = 3^{n^3}$, $z = 3^{(n^2+1)(n-1)}$, $t = 3^{(n-1)(n+1)}$, din relaţia (*) rezultă concluzia.

6. Dacă $ac \le 0$ atunci avem $b^2 \ge 0 \ge ac$. Dacă $ac > 0$ atunci din $a^2c^2 + ac + abc \le 0 \Rightarrow ac(ac + 1 + b) \le 0 \Rightarrow ac + 1 + b \le 0 \Rightarrow 4ac \le -4(1+b)$ (1). Dar $-4(1+b) \le b^2$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow b^2 \ge 4ac$.

7. Folosind ipoteza, inegalitatea cerută se scrie succesiv astfel:

$a^3(b+1) + b^3(a+1) \ge (a+1)(b+1) \Leftrightarrow ab(a^2+b^2) + a^3 + b^3 \ge ab + a + b + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^3 + b^3 \ge a + b + 2 \Leftrightarrow (a^2+b^2-2) + a^3 + b^3 - (a+b) \ge 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-2) + (a+b)(a^2-ab+b^2-1) \ge 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-2) + (a+b)(a^2+b^2-2) \ge 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-2)(1+a+b) \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, inegalitate adevărată.

8. Cum $a \cdot b = 1$ inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$\dfrac{a^n}{\frac{1}{a}+1} + \dfrac{\frac{1}{a^n}}{a+1} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{a^{n+1}}{a+1} + \dfrac{1}{a^n(a+1)} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{a^{2n+1}+1}{a^n(a+1)} \ge 1 \Leftrightarrow a^{2n+1} + 1 \ge a^{n+1} + a^n \Leftrightarrow a^{2n+1} - a^{n+1} - a^n + 1 \ge 0 \Leftrightarrow a^{n+1}(a^n-1) - (a^n-1) \ge 0 \Leftrightarrow (a^n-1)(a^{n+1}-1) \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1) \cdot (a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1) \ge 0$, relaţie adevărată.

9. Cum $ab = 1$, avem $\dfrac{a^3}{a+1} = \dfrac{a^3}{a+ab} = \dfrac{a^2}{1+b}$ şi $\dfrac{b^3}{b+1} = \dfrac{b^3}{b+ab} = \dfrac{b^2}{1+a}$.

Cu acestea inegalitatea cerută se scrie:

$\left(\dfrac{a^3}{a+1} + \dfrac{b^3}{b+1}\right) + \left(\dfrac{a^2}{b+1} + \dfrac{b^2}{a+1}\right) \ge 2 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a^2}{b+1} + \dfrac{b^2}{a+1}\right) \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b+1} + \dfrac{b^2}{a+1} \ge 1 \Leftrightarrow a^2(1+a) + b^2 \cdot (1+b) \ge (1+a)(1+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + a^2 + b^2 \ge ab + a + b + 1 \Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-ab) + a^2 + b^2 \ge a + b + 2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-1) - (a+b) + a^2 + b^2 - 2 \ge 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-2) + (a^2+b^2-2) \ge 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-2)(a+b+1) \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, inegalitate adevărată.

10. Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{a^{2010}+a^{2011}}{1+b} + \frac{b^{2010}+b^{2011}}{1+a} = \frac{a^{2010}(1+a)}{1+b} + \frac{b^{2010}(1+b)}{1+a} \ge 2 \cdot \sqrt{\frac{a^{2010}(1+a)}{1+b} \cdot \frac{b^{2010}(1+b)}{1+a}} = 2 \cdot \sqrt{(ab)^{2010}} = 2.$$

11. Cum $a\cdot b=1$ inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$$a^{2011}+\frac{1}{a^{2011}}\geq a^{2010}+\frac{1}{a^{2010}}\Leftrightarrow\frac{a^{4022}+1}{a^{2011}}\geq\frac{a^{4021}+a}{a^{2011}}\Leftrightarrow a^{4022}+1\geq a^{4021}+a\Leftrightarrow a^{4022}-a^{4021}-a+1\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{4021}(a-1)-(a-1)\geq 0\Leftrightarrow(a-1)(a^{4021}-1)\geq 0\Leftrightarrow(a-1)^2(a^{4020}+a^{4019}+...+a+1)\geq 0,$$ relație adevărată.

12. Inegalitatea se scrie succesiv $a^{2012}-a^{2011}+b^{2012}-b^{2011}-(a+b)+2\geq 0\Leftrightarrow a^{2011}(a-1)+b^{2011}(b-1)-$ $-(a-1)-(b-1)\geq 0\Leftrightarrow\ (a-1)(a^{2011}-1)+(b-1)(b^{2011}-1)\geq 0$ (1).

Dacă $a>1\Rightarrow a^{2011}>1$ și deci $(a-1)(a^{2011}-1)>0$ (2).

Dacă $a\leq 1\Rightarrow a^{2011}\leq 1$ și deci $(a-1)(a^{2011}-1)\geq 0$ (3).

Din (2) și (3) rezultă că $(a-1)(a^{2011}-1)\geq 0, (\forall)a\in\mathbb{R}$ (4).

și relația analoagă $(b-1)(b^{2011}-1)\geq 0, (\forall)b\in\mathbb{R}$ (5).

Adunând relațiile (4) și (5) rezultă că (1) are loc, c.c.t.d.

13. Cum $abc=1$, avem: $\frac{a^3+a^2}{bc+1}=\frac{a^3+a^2}{bc+abc}=\frac{a^2(a+1)}{bc(1+a)}=\frac{a^2}{bc}=\frac{a^3}{abc}=a^3$ și analoagele $\frac{b^3+b^2}{ca+1}=b^3$, $\frac{c^3+c^2}{ab+1}=c^3$. Cu acestea inegalitatea de demonstrat devine $a^3+b^3+c^3\geq 3$ (*).

Se cunoaște că $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0$, de unde rezultă că $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ și cum $abc=1$ obținem inegalitatea (*).

14. Avem $(a-d)^2\geq 0\Leftrightarrow(a+d)^2\geq 4ad\Leftrightarrow\frac{1}{(a+d)^2}\leq\frac{1}{4ad}$ (1) și analoagele: $\frac{1}{(b+d)^2}\leq\frac{1}{4bd}$ (2) și $\frac{1}{(c+d)^2}\leq\frac{1}{4cd}$ (3).

Adunând relațiile (1), (2) și (3) rezultă

$$\frac{1}{(a+d)^2}+\frac{1}{(b+d)^2}+\frac{1}{(c+d)^2}\leq\frac{1}{4d}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{(a+d)^2}+\frac{1}{(b+d)^2}+\frac{1}{(c+d)^2}\leq$$

$$\leq\frac{ab+bc+ca}{4abcd},$$ c.c.t.d.

15. Din enunț rezultă că: $x^2+y+\frac{1}{4}\leq 0$ și $y^2+x+\frac{1}{4}\leq 0$.

Adunând aceste relații obținem

$x^2+y^2+x+y+\frac{1}{2}\leq 0\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2(x+y)+1\leq 0\Leftrightarrow(x-y)^2+(x+y+1)^2\leq 0$, de unde $x-y=0$ și $x+y+1=0$. Rezultă că $x=y=-\frac{1}{2}$.

16. Din enunț rezultă că $x^2+z^2+y+\frac{1}{4}\leq z-\frac{1}{4}$ și $y^2+z^2+x+\frac{1}{4}\leq z-\frac{1}{4}$.

Adunând aceste relații obținem $x^2+y^2+2z^2+x+y+\frac{1}{2}\le 2z-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2+x+y+2z^2-2z+1\le 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)+2(x+y)+1+4z^2-4z+1\le 0\Leftrightarrow (x-y)^2+(x+y+1)^2+(2z-1)^2\le 0$, de unde $x-y=0$, $x+y+1=0$ și $2z-1=0$.

Rezultă că $x=y=-\frac{1}{2}$ și $z=\frac{1}{2}$.

17. Din $\frac{x^2+yz}{2}\ge\sqrt{x^2yz}$ rezultă $\frac{1}{x^2+yz}\le\frac{1}{2x\sqrt{yz}}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+yz}\le\frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$ (1).

Scriind analoagele pentru (1) și sumând membru cu membru obținem

$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2xyz}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$ (2).

Dar $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\le\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}$, de unde rezultă că:

$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\le x+y+z$ (3).

Din (2) și (3) rezultă $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2xyz}(x+y+z)\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+$ $+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$, adică inegalitatea cerută.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă relațiile (2) și (3) au loc cu egalitate, adică $x^2=yz$, $y^2=$ $=zx$, $z^2=xy$ și respectiv $x=y=z$. În concluzie, egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

18. Inegalitatea se scrie echivalent:

$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a^3+b^3+4}{12}+\frac{b^3+c^3+4}{12}+\frac{c^3+a^3+4}{12}$ (1).

Vom demonstra în prealabil că $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a^3+b^3+4}{12}$, $(\forall)\,a,b\in\mathbb{R}_+^*$ (2).

Avem (2) $\Leftrightarrow (a+b)(a^3+b^3+4)\ge 12ab$ (3). Dar $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ și $a^3+b^3\ge 2\sqrt{a^3b^3}$, de unde rezultă: $(a+b)(a^3+b^3+4)\ge 2\sqrt{ab}\,(2\sqrt{a^3b^3}+4)$ (4). Rămâne de demonstrat că $2\sqrt{ab}\cdot$ $\cdot(2\sqrt{a^3b^3}+4)\ge 12ab$ (5). Notând $\sqrt{ab}=t$, $t>0$, avem (5) $\Leftrightarrow 2t(2t^3+4)\ge 12t^2\Leftrightarrow t^3-3t+2\ge$ $\ge 0\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)\ge 0$, relație adevărată pentru orice $t>0$. Din (4) și (5) rezultă că (3) are loc și deci are loc (2). Scriind pentru (2) analoagele și adunând cele trei relații, se obține inegalitatea cerută.

19. Notăm $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{\frac{b}{2}}=y$, $\sqrt{\frac{c}{3}}=z$, $x,y,z\ge 0$. Rezultă $a=x^2$, $b=2y^2$, $c=3z^2$ și inegalitatea devine:

$x+y+z-\frac{x^2+2y^2+3z^2}{2}\le\frac{11}{12}\Leftrightarrow 6(x^2+2y^2+3z^2)-12(x+y+z)+11\ge 0\Leftrightarrow 6(x^2-2x+1)+$ $+12\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)+18\left(z^2-\frac{2}{3}z+\frac{1}{9}\right)\ge 0\Leftrightarrow 6(x-1)^2+12\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+18\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\ge 0.$